Inferência de *Tracking Error* para Fundos com 2 Indexadores

José Monteiro Varanda Neto

1. Risco

O risco do fundo pode ser medido pelo desvio-padrão dos retornos.

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2} = \sqrt{(w_{Ibov}\sigma_{Ibov})^2 + \left((1 - w_{Ibov})\sigma_{IPCA}\right)^2 + 2\rho_{Ibov,IPCA} w_{Ibov}\sigma_{Ibov}(1 - w_{Ibov})\sigma_{IPCA}}$$

Equação 1 – Risco de um Portfólio com 2 ativos

Desenvolvendo teremos:

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2} = \sqrt{w_{Ibov}^2\sigma_{Ibov}^2 + (1 - 2w_{Ibov} + w_{Ibov}^2)\sigma_{IPCA}^2 + 2\rho_{Ibov,IPCA} w_{Ibov}\sigma_{Ibov}(1 - w_{Ibov})\sigma_{IPCA}}$$

Equação 2 – Risco de um Portfólio com 2 ativos em função da alocação em um deles

2. O retorno em entre 2 instantes de tempo será dado por:

$$r_P = w_{Ibov} r_{Ibov} + (1 - w_{Ibov}) r_{IPCA}$$

Equação 3 - Retorno de um Portfólio com 2 ativos entre dois instantes de tempo

Desenvolvendo teremos:

$$r_P = w_{Ibov} r_{Ibov} + r_{IPCA} - w_{Ibov} r_{IPCA}$$

Resultando em:

$$r_P = r_{IPCA} + w_{Ibov}(r_{Ibov} - r_{IPCA})$$

Equação 4 - Retorno de um Portfólio com 2 ativos entre dois instantes de tempo em função da alocação em um deles

3. Tracking Error

O *tracking error* é uma medida de risco ex post, ou seja, é calculada depois do ocorrido, enquanto o risco do portfólio, medido pelo desvio-padrão é uma medida forward-looking, onde utilizamos parâmetros que podem ser obtidos de séries históricas ou estimados.

Ele é o desvio-padrão do retorno do portfólio corrente menos o retorno do benchmark.

Assim:

$$r_d = r_P - r_b$$

Equação 5 – Retorno Diferencial de um Portfólio contra um Benchmark

Onde:

r_d: Retorno diferencial do portfólio;

r_P: Retorno do Portfólio;

jose_monteiro30@hotmail.com
https://br.linkedin.com/in/josemonteirovarandaneto

r_b: Retorno do Benchmark;

Supondo que o Benchmark seja dado por:

$$w_{Ibov} = \alpha$$

$$w_{IPCA} = 1 - \alpha$$

O retorno esperado entre os instantes t e $t + 1$ será:

$$r_b = r_{IPCA} + \alpha(r_{Ibov} - r_{IPCA})$$

Um portfólio genérico terá valores de alocações dados por:

$$w_{Ibov} = \alpha + \beta$$

$$w_{IPCA} = 1 - \alpha - \beta$$

O retorno esperado entre os instantes t e $t + 1$ será:

$$r_P = r_{IPCA} + (\alpha + \beta)(r_{Ibov} - r_{IPCA})$$

O retorno diferencial será, então:

$$r_d = r_P - r_b = r_{IPCA} + (\alpha + \beta)(r_{Ibov} - r_{IPCA}) - [r_{IPCA} + \alpha(r_{Ibov} - r_{IPCA})]$$

Desenvolvendo:

$$r_d = \beta(r_{Ibov} - r_{IPCA})$$

Equação 6 – Retorno diferencial em função do excesso de alocação em um dos ativos em relação ao Benchmark

Onde β é a fração alocada em p.p. no Ibovespa além da fração alocada no Benchmark.

Calculando a variância desse retorno diferencial teremos:

$$\sigma_d^2 = E\{[r_d - E(r_d)]^2\}$$

Substituindo a equação 6 na equação acima, teremos:

$$\sigma_d^2 = E\left\{\left[\beta(r_{Ibov} - r_{IPCA}) - E\big(\beta(r_{Ibov} - r_{IPCA})\big)\right]^2\right\}$$

Desenvolvendo:

$$\sigma_d^2 = E\{[\beta(r_{Ibov} - \mu_{Ibov}) - \beta(r_{IPCA} - \mu_{IPCA})]^2\}$$

$$\sigma_d^2 = E\{\beta^2(r_{Ibov} - \mu_{Ibov})^2 + \beta^2(r_{IPCA} - \mu_{IPCA})^2 - 2\beta^2(r_{Ibov} - \mu_{Ibov})(r_{IPCA} - \mu_{IPCA})\}$$

jose_monteiro30@hotmail.com
https://br.linkedin.com/in/josemonteirovarandaneto

Aplicando a esperança matemática:

$$\sigma_d^2 = \beta^2 E[(r_{Ibov} - \mu_{Ibov})^2] + \beta^2 E[(r_{IPCA} - \mu_{IPCA})^2] - 2\beta^2 E[(r_{Ibov} - \mu_{Ibov})(r_{IPCA} - \mu_{IPCA})]$$

Chega-se à expressão do Tracking Error esperado de um portfólio com β p.p. alocados no Ibovespa a mais que a alocação definida no benchmark.

$$\sigma_d = TE_{forward\ looking} = \beta\sqrt{\sigma_{Ibov}^2 + \sigma_{IPCA}^2 - 2\rho_{Ibov,IPCA}\sigma_{Ibov}\sigma_{IPCA}}$$

Equação 7 – Estimador para Retorno Diferencial para Alocação adicional em Ativo com portfólio com 2 ativos

Casos Especiais

a) Se $\beta = 0$, $\sigma_d = 0$. Faz sentido, porque significa que o PM está com alocação passiva no benchmark.

b) Se $\rho_{Ibov,IPCA} = 1$, $\sigma_d = 0$. Faz sentido, porque significa que na realidade os ativos em questão se comportam como um só e o retorno diferencial (e o risco também) será zero independente da alocação adicional no Ibovespa.

4. *Appraisal Ratio* ou *Information Ratio*

O information ratio divide o α de Jensen do portfólio pelo risco não sistemático do portfólio, chamado de tracking error (vide acima) pela indústria. Ele mede o retorno adicional por unidade de risco que poderia ser diversificado. O appraisal ratio foi criado com o objetivo de mensurar e distinguir as habilidades dos gestores de ativos.

$$Information\ Ratio = \frac{\alpha_P}{\sigma_d}$$

No caso em questão, teremos:

$$Information\ Ratio = \frac{\alpha_P}{TE} = \frac{r_d}{\sigma_d} = \pm\frac{(r_{Ibov} - r_{IPCA})}{\sqrt{\sigma_{Ibov}^2 + \sigma_{IPCA}^2 - 2\rho_{Ibov,IPCA}\sigma_{Ibov}\sigma_{IPCA}}}$$

Equação 8 – Information Ratio

Que não dependerá da alocação do portfólio, uma vez que é um retorno diferencial sobre o risco que a alocação diferencial (além do benchmark) adiciona ao portfólio.

5. Portfólio Ótimo

Supondo que tenhamos só a existência desses dois ativos no portfólio, podemos calcular as alocações ótimas dos dois ativos de sorte e que o retorno esperado do portfólio seja maximizado.

Algebricamente:

$$\max_{\beta} E(r_P) = (\alpha + \beta)E(r_{Ibov}) + (1 - \alpha - \beta)E(r_{IPCA})$$

jose_monteiro30@hotmail.com
https://br.linkedin.com/in/josemonteirovarandaneto

$$s.a.\ \sigma_d = \beta\sqrt{\sigma_{Ibov}^2 + \sigma_{IPCA}^2 - 2\rho_{Ibov,IPCA}\sigma_{Ibov}\sigma_{IPCA}}$$

A otimização acima assume que:

a) Usaremos todo o risco diferencial (TE) para obter o resultado esperado.

b) Obtemos esse resultando com apenas os dois fatores de risco do benchmark.

Se abrirmos a primeira equação, teremos:

$$E(r_P) = E(r_{IPCA}) + \alpha[E(r_{Ibov}) - E(r_{IPCA})] + \beta[E(r_{Ibov}) - E(r_{IPCA})]$$

Onde primeira e a segunda parcelas representam o resultado esperado se o PM mantiver a carteira nos níveis da linha d'água do regulamento, com α% alocados no Ibovespa.

A terceira parcela é a equação 6, ou seja, o resultado adicional da alocação diferente do benchmark (lembrando que β pode ser positivo ou negativo).

É possível observar que o problema de otimização se trata de uma solução de canto, ou seja, a despeito de os retornos esperados serem variáveis aleatórias, a alocação ótima para alguém que tivesse convicção sobre o retorno esperado diferencial $[E(r_{Ibov}) - E(r_{IPCA})]$ seria tomar o máximo de risco possível, respeitado o limite de Benchmark VaR do fundo, que será um fator de escala sobre o risco diferencial, σ_d.

Então, a solução seria dada pela resolução da equação 7 para β:

$$\sigma_d = \beta\sqrt{\sigma_{Ibov}^2 + \sigma_{IPCA}^2 - 2\rho_{Ibov,IPCA}\sigma_{Ibov}\sigma_{IPCA}}$$

$$\beta = +- \frac{\sigma_d}{\sqrt{\sigma_{Ibov}^2 + \sigma_{IPCA}^2 - 2\rho_{Ibov,IPCA}\sigma_{Ibov}\sigma_{IPCA}}}$$

Onde **as volatilidades esperadas do Ibovespa, do IPCA e a correlação entre os retornos desses fatores de risco são variáveis exógenas**.

Vamos utilizar o valor positivo quando acharmos que o Ibovespa vai ter um retorno maior que o IPCA e vice-versa.

Por fim, o retorno esperado do portfólio será dado por:

$$E(r_P) = E(r_{IPCA}) + \alpha[E(r_{Ibov}) - E(r_{IPCA})] + - \frac{\sigma_d[E(r_{Ibov}) - E(r_{IPCA})]}{\sqrt{\sigma_{Ibov}^2 + \sigma_{IPCA}^2 - 2\rho_{Ibov,IPCA}\sigma_{Ibov}\sigma_{IPCA}}}$$

Ex post, pode-se escrever:

$$r_P = r_{IPCA} + \alpha[r_{Ibov} - r_{IPCA}] + Information\ Ratio\ \times \sigma_d$$

jose_monteiro30@hotmail.com
https://br.linkedin.com/in/josemonteirovarandaneto