Proposta de Hedge de Taxas de Juros para Planos de Benefícios Pós-Emprego

Prof. José Monteiro Varanda Neto

Fevereiro/2021

1. Motivação

O objetivo do presente documento é desenhar um modelo de proteção para as entidades patrocinadoras de benefícios pós-emprego em relação a oscilações da curva de juros real da economia brasileira, medida pelo cupom de IPCA.

É sabido que um hedge feito dessa forma é imperfeito, dada a gama de variáveis[1] que impacta os passivos atuariais dessas entidades patrocinadoras, porém, tudo o mais constante, é esperado que, com revisões periódicas com uma frequência conveniente, essa proteção tenderá a responder de maneira adequada, dado que a volatilidade esperada das variáveis que impactam os modelos atuariais em tese é menor que aquela presente na curva de juros real da economia brasileira.

Os insumos necessários para executar essa estratégia de proteção são:

a) Carteira de ativos da entidade patrocinada, com valores marcados a mercados e quantidades de títulos existentes;

b) Passivo Atuarial correspondente;

c) Lista das NTN-Bs disponíveis no mercado, com suas respectivas taxas de desconto correntes;

[1] Tábuas Atuariais com expectativas de vidas e outras variáveis importantes do cálculo atuarial mudam ao longo do tempo afetando os planos de aposentadoria do tipo BD, bem como a inflação médica e fator de envelhecimento em planos de saúde e seguros de vida.

jose_monteiro30@hotmail.com

2. Modelagem

Uma das formas de realizar um procedimento de imunização de carteiras de investimento é através do uso da duration modificada, que é uma aproximação de primeira ordem para a variação percentual no preço de um título devido a uma variação na taxa interna de retorno desse título[2].

a) Para que o valor da carteira em questão seja invariante com relação a taxa de juros, devemos ter uma primeira equação dada por:

$$D_{NTN-Bs} MtM_{NTN-Bs} = D_{Passivo\ Atuarial} VP_{Passvo\ Atuarial}$$

Equação 1 – Imunização com *Duration* Modificada

Onde:

D_{NTN-Bs}: Duration Modificada das NTN-Bs;

MtM_{NTN-Bs}: Valor Presente do conjunto de NTN-Bs quando descontadas a taxas de mercado[3];

$D_{Passivo\ Atuarial}$: Duration Modificada do Passivo Atuarial;

$VP_{Passvo\ Atuarial}$: Valor Presente do Passivo Atuarial.

Em carteiras de fundos de investimento, ou tesouraria de bancos, a primeira equação já resolve o problema, uma vez que a liquidez é elevada e o hedge é feito com derivativos de taxas de juros, portanto, sem caixa explícito.

Porém em EFPCs ou Entidades Patrocinadoras de planos de assistência médica, os instrumentos utilizados para hedge são efetivamente os recursos que serão separados no balanço para o pagamento desses benefícios, portanto temos uma condição a mais a ser respeitada no problema, que é garantir a suficiência dos recursos (caixa) para pagamento dos benefícios no longo prazo.

b) Para garantir hoje a suficiência dos recursos no longo prazo, é necessário que:

$$MtM_{NTN-Bs} + MtM_{Outros\ Ativos} = VP_{Passvo\ Atuarial}$$

Equação 2 – Suficiência de Recursos

A equação (2) está indicando que o valor presente dos ativos do plano tem que ser suficiente para pagar os benefícios futuros do plano.

Escrita de outra forma, a equação (2)[4] fica:

---

[2] Mais detalhes sobre imunização de carteiras podem ser encontrados em "O Mercado de Renda Fixa no Brazil: Conceitos, Precificação e Risco" de José Monteiro Varanda Neto, José Carlos de Souza Santos e Eduardo Morato Mello.

[3] Esse conjunto de NTN-Bs engloba tanto as NTN-Bs detidas pelo fundo de pensão como as adquiridas pela patrocinadora para proteger-se de oscilações de taxas de juros ao longo do tempo.

[4] Na verdade, trata-se de uma desigualdade, já que o resultado perseguido é que os ativos custeiem o plano a cada momento e, portanto, seu valor de realização seja superior ao valor dos benefícios em qualquer instante do tempo. Isso é garantido desde que no mínimo essa relação seja uma igualdade e que os ativos rendam mais que a meta atuarial ao longo do tempo.

$$MtM_{NTN-Bs} + MtM_{Outros\ Ativos} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} Beneficio_i}{(1 + y_{Atuarial})^{t_i}}$$

Equação 5 – Condição para o Plano Atuarialmente Equilibrado

Onde:

$y_{Atuarial}$: Meta Atuarial atual do plano de benefícios;

$Beneficio_i$: Benefício futuro de cada funcionário i;

Ou seja, a solução do problema consiste em encontrar o melhor valor de MtM_{NTN-Bs} que resolve as duas condições simultaneamente.

Por que melhor? Porque existe um conjunto de NTN-Bs disponível emitido pela Secretaria do Tesouro Nacional e o valor presente descrito na equação (1) é a soma dos valores a mercado de quantidades convenientes de cada uma delas.

A figura abaixo traz o conjunto de NTN-Bs disponível atualmente na economia brasileira, com seus vencimentos, preços e taxas de retorno.

Títulos Públicos Federais										02/Fev/2021
Papel IPCA		NTN-B - Taxa (% a.a.)/252								
							Intervalo Indicativo			
Código SELIC	Data Base/Emissão	Data de Vencimento	Tx. Compra	Tx. Venda	Tx. Indicativas	PU	Mínimo (D0)	Máximo (D0)	Mínimo (D+1)	Máximo (D+1)
760199	15/07/2000	15/05/2021	-2,3332	-2,3801	-2,3610	3.575,434971	-3,0024	-1,2979	-3,0451	-1,3374
760199	15/07/2000	15/08/2022	0,3123	0,2892	0,3007	3.840,997137	-0,0244	1,3670	-0,0680	1,3238
760100	15/07/2000	15/03/2023	1,0600	1,0250	1,0250	3.880,662939	0,7578	2,1346	0,6829	2,0595
760199	15/07/2000	15/05/2023	1,0327	1,0035	1,0200	3.874,767231	0,7522	2,1351	0,6723	2,0551
760199	15/07/2000	15/08/2024	1,8609	1,8324	1,8419	4.025,150919	1,5199	2,9308	1,4365	2,8475
760199	15/07/2000	15/05/2025	2,1005	2,0761	2,0900	4.034,741363	1,7357	3,1306	1,6673	3,0622
760199	15/07/2000	15/08/2026	2,5353	2,5066	2,5200	4.149,830146	2,1752	3,4956	2,0951	3,4159
760199	15/07/2000	15/08/2028	2,9425	2,9145	2,9270	4.244,275325	2,6001	3,7804	2,5245	3,7051
760199	15/07/2000	15/08/2030	3,1357	3,1070	3,1200	4.345,395867	2,8055	3,8740	2,7355	3,8042
760199	15/07/2000	15/05/2035	3,3967	3,3650	3,3821	4.494,582474	3,0808	4,0209	3,0068	3,9471
760199	15/07/2000	15/08/2040	3,7298	3,6958	3,7122	4.618,316456	3,4418	4,3840	3,3437	4,2861
760199	15/07/2000	15/05/2045	3,9173	3,8813	3,8928	4.614,576873	3,6364	4,5460	3,5288	4,4386
760199	15/07/2000	15/08/2050	3,9486	3,9109	3,9201	4.778,469978	3,6721	4,5564	3,5599	4,4445
760199	15/07/2000	15/05/2055	3,9821	3,9519	3,9592	4.794,018228	3,7203	4,5878	3,6019	4,4697

Figura 1 – Estoque de NTN-Bs em aberto

Fonte; Anbima em https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/taxas-de-titulos-publicos.htm

É possível mostrar que a equação (1) pode ser reescrita como:

$$D_{NTN-Bs} MtM_{NTN-Bs} = \sum_{k=1}^{n} D_k MtM_k$$

Equação 3 – Conjunto das NTN-Bs

Onde:

D_k: Duration Modificada de cada NTN-B escolhida para compor a proteção;

MtM_k: Valor Presente de cada NTN-B escolhida para compor a proteção;

jose_monteiro30@hotmail.com

O valor da duration modificada é calculado como:

$$D_k = -\frac{M_k}{(1 + y_k)}$$

Equação 4 – Duration Modificada em função da Duration de Macaulay

Onde:

y_k: Taxa Interna de Retorno da NTN-B de vencimento k.

jose_monteiro30@hotmail.com

3. Cálculo das Quantidades de NTN-Bs na Patrocinadora

Continuando o exercício, pode-se reescrever as equações (1) e (2) quebrando o conjunto de NTN-Bs em conjuntos detidos pela patrocinadora e pelo plano:

$$\sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_k^{Pat} D_k^{Pat} MtM_k^{Pat} + \sum_{j=1}^{n_{Plano}} Q_j^{Plano} D_j^{Plano} MtM_j^{Plano} = D_{Passivo\ Atuarial} VP_{Passvo\ Atuarial}$$

Equação 6 – Estruturação do Hedge levando em conta NTN-Bs detidas pelo plano de benefícios

Onde:

n_{Pat}: Número total de vencimentos de NTN-Bs utilizadas pela patrocinadora para proteção de seu balanço em relação a oscilação de taxa de juro real em seu plano de benefícios;

Q_k^{Pat}: Quantidade da k-ésima NTN-B utilizada pela patrocinadora para proteção de seu balanço em relação a oscilação de taxa de juro real em seu plano de benefícios;

D_k^{Pat}: Duration Modificada da k-ésima NTN-B utilizada pela patrocinadora para proteção de seu balanço em relação a oscilação de taxa de juro real em seu plano de benefícios;

MtM_k^{Pat}: Valor a mercado da k-ésima NTN-B utilizada pela patrocinadora para proteção de seu balanço em relação a oscilação de taxa de juro real em seu plano de benefícios;

n_{Plano}: Número total de vencimentos de NTN-Bs presente no balanço do plano de benefícios;

Q_j^{Plano}: Quantidade da j-ésima NTN-B presente no balanço do plano de benefícios;

D_j^{Plano}: Duration Modificada da da j-ésima NTN-B presente no balanço do plano de benefícios;

MtM_j^{Plano}: Valor a mercado da j-ésima NTN-B presente no balanço do plano de benefícios;

Sob essa visão, a equação (2) fica:

$$\sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_k^{Pat} MtM_k^{Pat} + \sum_{j=1}^{n_{Plano}} Q_j^{Plano} MtM_j^{Plano} + \sum_{i=1}^{n_{Ativos}} Q_i^{Ativos} MtM_i^{Ativos} = VP_{Passivo\ Atuarial}$$

Equação 7 – Condição para Plano Atuarialmente Equilibrado

Onde:

Q_i^{Ativos}: Quantidade de Ativos do plano de benefício que não tem relação com juro real;

MtM_i^{Ativos}: Valor Presente dos Ativos do plano de benefício que não tem relação com juro real;

Assim, as incógnitas buscadas são as quantidades Q_k^{Pat}.

Isolando as equações com as incógnitas do lado esquerdo, teremos:

$$\sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_k^{Pat} D_k^{Pat} MtM_k^{Pat} = D_{Passivo\ Atuarial} VP_{Passivo\ Atuarial} - \sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_j^{Plano} D_j^{Plano} MtM_j^{Plano}$$

jose_monteiro30@hotmail.com

$$\sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_k^{Pat} MtM_k^{Pat} = VP_{Passivo\ Atuarial} - \left(\sum_{j=1}^{n_{Plano}} Q_j^{Plano} MtM_j^{Plano} + \sum_{i=1}^{n_{Ativos}} Q_i^{Ativos} MtM_i^{Ativos} \right)$$

Equação 8 - Sistema de Equações para Cálculo de Quantidades de NTN-Bs

Em tese, qualquer conjunto de NTN-Bs que satisfaça essas condições é elegível a ser o desenho da proteção, bastando que, para isso, as 2 equações acima estejam satisfeitas simultaneamente.

Se escolhermos por exemplo as NTN-Bs 2050 e 2055, teríamos:

$$Q_{2050}^{Pat} D_{2050}^{Pat} MtM_{2050}^{Pat} + Q_{2055}^{Pat} D_{2055}^{Pat} MtM_{2055}^{Pat} = D_{Passivo\ Atuarial} VP_{Passivo\ Atuarial} - \sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_j^{Plano} D_j^{Plano} MtM_j^{Plano}$$

$$Q_{2050}^{Pat} MtM_{2050}^{Pat} + Q_{2055}^{Pat} MtM_{2055}^{Pat} = VP_{Passivo\ Atuarial} - \left(\sum_{j=1}^{n_{Plano}} Q_j^{Plano} MtM_j^{Plano} + \sum_{i=1}^{n_{Ativos}} Q_i^{Ativos} MtM_i^{Ativos} \right)$$

Equação 9 - Sistema de Equações para Cálculo de Quantidades de NTN-Bs 2050 e 2055

Para melhorar a aderência do modelo em relação a efeitos de 2ª ordem oriundos das oscilações de juro real poderíamos incluir uma terceira equação com a convexidade dos títulos.

$$\sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_k^{Pat} C_k^{Pat} MtM_k^{Pat} = C_{Passivo\ Atuarial} VP_{Passivo\ Atuarial} - \sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_j^{Plano} C_j^{Plano} MtM_j^{Plano}$$

Porém nesse arranjo, é necessário que seja calculada a convexidade do passivo atuarial, que depende de toda a estrutura de recebimentos futura dos participantes.

jose_monteiro30@hotmail.com

4. Hedge de Mínima Variância

Como já visto anteriormente, existem muitos graus de liberdade no sistema de equações (8), dado que existem várias NTN-Bs em aberto, conforme pode-se observar da figura (1).

Além disso, as curvas de juros podem realizar três movimentos possíveis, como translação, rotação e torção, o que vai de encontro a hipótese utilizada na modelagem da duration.

Para contornar esse problema, podemos:

a) Escolher vencimentos próximos à duration de Macaulay do plano de benefícios pós-emprego e adotar uma estratégia de validação estatística, com a utilização de um software com modelo de VaR, por exemplo.
b) Buscar um modelo de minimização de VaR das posições detidas pela patrocinadora sujeito às duas condições anteriores.

Assim, o item b) teria uma equação adicional que seria dada por uma espécie de função VaR, que teria como dados de entrada as quantidades de NTN-B para hedge de exposição à taxa de juros real na patrocinadora e o valor futuro do passivo atuarial[5]:

$$VaR = f\left(Q_k^{Pat}, MtM_k^{Pat}, D_{Passivo\ Atuarial}, VF_{Passivo\ Atuarial}\right)$$

Equação 10 – Função VaR do Portfólio Passivo Atuarial + Hedge na Patrocinadora

Se a patrocinadora se tratar de um banco, os dois registros estarão na carteira comercial e, portanto, a métrica para cálculo de risco é o IRRBB, logo a equação (10) teria que ser alterada para:

$$IRRBB = f\left(Q_k^{Pat}, MtM_k^{Pat}, D_{Passivo\ Atuarial}, VF_{Passivo\ Atuarial}\right)$$

Equação 11 – Função VaR do Portfólio Passivo Atuarial + Hedge na Patrocinadora

E o problema de minimização resultante seria:

$$\min_{Q_k^{Pat}} VaR$$

$$s.a.\left\{\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_k^{Pat} D_k^{Pat} MtM_k^{Pat} = D_{Passivo\ Atuarial} VP_{Passvo\ Atuarial} - \sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_j^{Plano} D_j^{Plano} MtM_j^{Plano} \\ \sum_{k=1}^{n_{Pat}} Q_k^{Pat} MtM_k^{Pat} = VP_{Passivo\ Atuarial} - \left(\sum_{j=1}^{n_{Plano}} Q_j^{Plano} MtM_j^{Plano} + \sum_{i=1}^{n_{Ativos}} Q_i^{Ativos} MtM_i^{Ativos}\right) \\ Q_k^{Pat} \geq 0 \end{array}\right\}$$

Que é um problema de otimização quadrática com restrição.

[5] Na verdade, não existe o valor futuro do passivo atuarial, pois ele compreende, como indicado na equação (5), a soma pela massa de funcionários de todos os benefícios futuros reconhecidos que estão atrelados à taxa de inflação. Uma aproximação aceitável para seu valor seria o valor $VF_{Passvo\ Atuarial} = VP_{Passvo\ Atuarial}(1 + y_{Atuarial})^{D_{Passivo\ Atuarial}}$.

jose_monteiro30@hotmail.com

A primeira restrição garante a conhecida **imunização de carteiras** pela duration modificada.

A segunda restrição garante que o plano seja superavitário ao longo do tempo, assumindo que a rentabilidade esperada dos ativos seja superior à meta atuarial.

A terceira restrição permite que sejam vendidas NTN-Bs a descoberto para realizar a otimização.

jose_monteiro30@hotmail.com