Modelo para Cálculo de Rentabilidade de Título Público para Pessoa Física

José Monteiro Varanda Neto

jose_monteiro30@hotmail.com

Julho/2014

1. Motivação

Desde o início da operação do sistema de negociação de títulos públicos Tesouro Direto, o interesse dos investidores individuais pela aquisição de papéis do governo federal vem aumentando.

Uma preocupação recorrente se refere ao desconforto que existe ao se adquirir um título pré-fixado (ou com uma componente pré-fixada, como as NTN-Bs) com relação a eventuais perdas com aumento de taxas de juros.

O modelo proposto aqui é aplicado a essa situação, servindo para atribuir uma taxa instantânea de referência, como percentual da taxa CDI[1] no caso de um aumento expressivo nas taxas de juros da economia.

Com esse modelo, o investidor pode avaliar esporadicamente qual a performance do papel, para que possa tomar a decisão se permanece com o mesmo, dado o cenário prospectivo do mercado de juros.

2. Modelo para título Pré

Vamos considerar inicialmente que o investidor adquire um papel pré-fixado ao preço de mercado com o intuito de mantê-lo até o vencimento e que ocorre uma elevação substancial da taxa de juros em algum momento no tempo. Qual seria o efeito em termos de performance?

Como a performance só pode ser medida na data de vencimento, uma vez que o acumulado das taxas CDI só será conhecido na data de vencimento, o modelo deve ser capaz de sinalizar ao longo do tempo como seu investimento está se comportando em relação ao CDI.

Uma forma de se fazer isso é marcar o título a mercado em momentos relevantes e comparar com a curva de juros prospectiva (que é a expectativa do mercado para o comportamento da taxa CDI ao longo do tempo).

Para marcar a mercado um título pré-fixado em algum momento t (em dias úteis), basta descontá-lo pela taxa pré para o vencimento nesse momento:

$$MtM = VA \times \frac{(1 + i_{emissão})^{\frac{T}{252}}}{(1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}}$$

[1] Na verdade, o nome da taxa é DI. CDI é o papel transacionado entre IFs que usa a taxa DI como referência. Como o mercado acabou misturando os conceitos, estou usando o termo taxa CDI para me referir à taxa DI.

Admitindo que no restante do tempo a taxa de juros permaneça a mesma, teríamos o valor financeiro no vencimento dado por:

$$VF = VA \times \frac{(1 + i_{emissão})^{\frac{T}{252}}}{(1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}} \times (1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}$$

A equação acima mostra porque se o investidor não sacar o recurso a rentabilidade auferida será àquela da emissão, bastando para isso fazer t=T.

O que não se sabe à priori é se esse rendimento é satisfatório ou não.

Para saber a perda ou ganho de rendimento quando da oscilação da cuva de juros, temos que comparar a equação acima ao acumulado das taxas CDI de sorte a aferir a performance do investimento em relação ao benchmark do mercado de juros:

$$VF = VA \times \prod_{k=0}^{T-1} (1 + \alpha \times CDI_k)$$

Igualando os termos:

$$VA \times \frac{(1 + i_{emissão})^{\frac{T}{252}}}{(1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}} \times (1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}} = VA \times \prod_{k=0}^{T-1} (1 + \alpha \times CDI_k)$$

Onde α é o percentual do CDI e CDI_k é a taxa CDI em % a.d..

O lado direito da equação é composto por duas parcelas, uma que já é conhecida (pois se trata do acumulado do CDI até a data t) e a outra que é esperada:

$$\frac{(1 + i_{emissão})^{\frac{T}{252}}}{(1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}} \times (1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}} = \prod_{k=0}^{t-1} (1 + \alpha \times CDI_k) \times (1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}$$

Assim, admitindo que a ETTJ[2] é a melhor previsão para o acumulado do CDI no instante t, temos que:

$$\frac{(1 + i_{emissão})^{\frac{T}{252}}}{(1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}} = \prod_{k=0}^{t-1} (1 + \alpha \times CDI_k)$$

3. Exemplo Título Pré

Imagine que um investidor adquire um CDB de vencimento em 5 anos com taxa de 12% a.a..

[2] ETTJ: Estrutura a Termo de Taxas de Juros: É a curva que relaciona as taxas de juro com o prazo do instrumento.

Supondo que depois de 1 ano a taxa para 4 anos esteja em 12,2% a.a. e que a média da taxa CDI do desde o início da operação até a data seja 11% a.a., qual é a rentabilidade instantânea da carteira?

A taxa CDI em base diária será $(1 + 11\%)^{\frac{1}{252}} - 1 = 0{,}041\%$ a.d..

Substituindo os valores:

$$\frac{(1 + 12\%)^5}{(1 + 12{,}2\%)^4} = (1 + \alpha \times 0{,}041\%)^{252}$$

Chega-se a um valor de percentual de CDI da operação, $\alpha = 98{,}3\%$.

4. Modelo para NTN-B

O valor a mercado de uma NTN-B é dado por:

$$P_{NTN-B} = \frac{IPCA_t}{IPCA_{inicial}} \times \sum_{j=1}^{n} \frac{FC_j}{(1 + r)^{\frac{t_j}{252}}}$$

Onde r é uma TIR[3] em juro real e os fluxos de caixa FC_j semestrais são descontados a essa taxa.

O termo $IPCA_{inicial}$ se refere ao valor do IPCA de referência da série iniciada em julho/2000.

A NTN-B principal é um título *zero cupom*, ou seja, não há pagamento de cupons intermediários, o que torna a equação anterior mais simples:

$$P_{NTN-B} = \frac{IPCA_t}{IPCA_{inicial}} \times \frac{1048{,}8}{(1 + r)^{\frac{T-t}{252}}}$$

Imaginando que a NTN-B seja adquirida em t=0. O Valor Aplicado será:

$$VA = \frac{IPCA_0}{IPCA_{inicial}} \times \frac{1048{,}8}{\left(1 + r_{aquisição}\right)^{\frac{T}{252}}}$$

O valor da NTN-B a mercado em uma data t[4] qualquer será:

$$VF_{NTN-B} = VA \times \frac{IPCA_t}{IPCA_0} \times \frac{\left(1 + r_{aquisição}\right)^{\frac{T}{252}}}{\left(1 + r_{mercado}\right)^{\frac{T-t}{252}}}$$

[3] TIR: Taxa Interna de Retorno. Taxa que faz com que o fluxo de caixa descontado dos pagamentos da NTN-B (cupons de juros e principal) iguale o preço de mercado que é obtido do desconto do mesmo fluxo de caixa porém em relação à ETTJ à vista.

[4] Observe que o Valor Aplicado é exatamente o preço da NTN-B em t=0. Para uma data t, basta acumular os juros da aquisição e calcular o pró-rata da inflação.

E o valor da NTN-B no vencimento será dado por:

$$VF_{NTN-B} = VA \times \frac{IPCA_t}{IPCA_0} \times \frac{(1 + r_{aquisição})^{\frac{T}{252}}}{(1 + r_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}} \times \frac{IPCA_T}{IPCA_t} \times (1 + r_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}$$

Como no exemplo do papel pré, para se aferir a performance vamos calcular o percentual do CDI equivalente:

$$VF_{NTN-B} = VA \times \prod_{k=0}^{T-1}(1 + \alpha \times CDI_k)$$

Igualando os termos:

$$VF_{NTN-B} = VA \times \frac{IPCA_t}{IPCA_0} \times \frac{(1 + r_{aquisição})^{\frac{T}{252}}}{(1 + r_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}} \times \frac{IPCA_T}{IPCA_t} \times (1 + r_{mercado})^{\frac{T-t}{252}} = VA \times \prod_{k=0}^{T-1}(1 + \alpha \times CDI_k)$$

O lado direito tem uma parcela conhecida e outra que é estimada através da ETTJ de cupom de IPCA.

$$VF_{NTN-B} = \frac{IPCA_t}{IPCA_0} \times \frac{(1 + r_{aquisição})^{\frac{T}{252}}}{(1 + r_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}} \times \frac{IPCA_T}{IPCA_t} \times (1 + r_{mercado})^{\frac{T-t}{252}} = \prod_{k=0}^{t-1}(1 + \alpha \times CDI_k) \times (1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}$$

Por arbitragem de taxas de juro, a taxa de juros nominal tem que ser igual ao produto da taxa de juros real pela inflação esperada, logo:

$$(1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}} = (1 + r_{mercado})^{\frac{T-t}{252}} \times \frac{IPCA_T}{IPCA_t}$$

Ou, expressando a inflação esperada acumulada como um produto de taxas anuais:

$$(1 + i_{mercado})^{\frac{T-t}{252}} = (1 + r_{mercado})^{\frac{T-t}{252}} \times (1 + \pi_e)^{\frac{T-t}{252}}$$

Um pouco de álgebra e chega-se a:

$$\frac{IPCA_t}{IPCA_0} \times \frac{(1 + r_{aquisição})^{\frac{T}{252}}}{(1 + r_{mercado})^{\frac{T-t}{252}}} = \prod_{k=0}^{t-1}(1 + \alpha \times CDI_k)$$

Ou:

$$(1+\pi)^{\frac{t}{252}} \times \frac{\left(1+r_{aquisição}\right)^{\frac{T}{252}}}{\left(1+r_{mercado}\right)^{\frac{T-t}{252}}} = \prod_{k=0}^{t-1}(1+\alpha \times CDI_k)$$

Onde π é a inflação anual média no período de 0 a t.

5. Exemplo NTN-B Principal

Imagine que o investidor adquire uma NTN-B de 10 anos de prazo com taxa de juros real de 5,8% a.a. e, ao fim do quarto ano o valor da taxa para 6 anos (vencimento da operação) é 5,5% a.a..

Supondo uma taxa CDI média no período de 11% a.a. e que a inflação média no período foi de 6% a.a., teremos:

$$(1+\pi)^{\frac{t}{252}} \times \frac{\left(1+r_{aquisição}\right)^{\frac{T}{252}}}{\left(1+r_{mercado}\right)^{\frac{T-t}{252}}} = \prod_{k=0}^{t-1}(1+\alpha \times CDI_k)$$

$$(1+6\%)^{4} \times \frac{(1+5{,}8\%)^{10}}{(1+5{,}5\%)^{6}} = (1+\alpha \times 0{,}041\%)^{4\times 252}$$

Chega-se a um valor de percentual de CDI da operação, $\alpha = 113{,}9\%$.